

Odporność składki ubezpieczeniowej w bayesowskim modelu ryzyka łącznego na zaburzenia niezależności częstości szkód i wartości oczekiwanej ich wielkości

Agata Boratyńska

Szkoła Główna Handlowa SGH

V Kongres Statystyki Polskiej, Warszawa 1-3.07.2025

- ① Bayesowski model ryzyka łącznego
- ② Składka indywidualna, kolektywna i bayesowska
- ③ Mierniki odporności składki na zaburzenia rozkładu a priori
 - Oscylacja składki
 - Składka o gamma-minimaksowej utracie a priori i a posteriori
- ④ Rodziny rozkładów a priori
- ⑤ Wyniki
- ⑥ Przykłady – wpływ zaburzenia rozkładu a priori na mnożniki składki w systemie bonus-malus

Bayesowski model ryzyka łącznego

- N_h – liczba szkód w roku h , $h = 1, 2, \dots, t$, $N_h \sim Poiss(\lambda)$
- $Y_{h,1}, Y_{h,2}, \dots$ – wartości szkód, przy danym θ zmienne i.i.d.,
 $Y_{h,i} \sim Gamma(a, \frac{1}{\theta})$, $S_h = \sum_{i=1}^N Y_{h,i}$
- Dane (N^t, S^t) , $N = \sum_{h=1}^t N_h$ and $S = \sum_{h=1}^t S_h$
- Przy danych λ, θ zmienne N , $Y_{h,i}$ niezależne
- Rozkład a priori: $\lambda \sim \pi_{1,0} = Gamma(\mu_{1,0} k_{1,0}, k_{1,0})$,
 $\theta \sim \pi_{2,0} = IGamma(k_{2,0} + 1, \mu_{2,0} k_{2,0})$
- Standardowo: λ, θ niezależne $\pi_{0,0}(\lambda, \theta) = \pi_{1,0}(\lambda) \pi_{2,0}(\theta)$, $E\lambda = \mu_{1,0}$,
 $E\theta = \mu_{2,0}$

Składka indywidualna, kolektywna i bayesowska

Składka indywidualna (składka netto) –

$$H(\lambda, \theta) = E(S_h | \lambda, \theta) = a\lambda\theta$$

Cel – oszacowanie składki indywidualnej przy kwadratowej funkcji straty:

Składka kolektywna (wiedza a priori)

$$H^C(\pi) = E_\pi(a\lambda\theta) = a\mu_{1,0}\mu_{2,0},$$

Składka bayesowska (wiedza a priori i historia szkodowości) – estymator bayesowski

$$H_\pi^B(N^t, S^t) = E_\pi(a\lambda\theta | N^t, S^t) = a \frac{N + \mu_{1,0}k_{1,0}}{t + k_{1,0}} \frac{S + k_{2,0}\mu_{2,0}}{Na + k_{2,0}}.$$

Niedokładność wiedzy a priori

- Modelowanie rodziny rozkładów a priori Γ
- Mierniki odporności składki na zaburzenia rozkładu a priori
 - Wyznaczanie oscylacji składki kolektywnej i bayesowskiej

$$r(H^C, \Gamma) = \sup_{\pi \in \Gamma} H^C(\pi) - \inf_{\pi \in \Gamma} H^C(\pi),$$

$$r(H^B(\cdot, N^t, S^t), \Gamma) = \sup_{\pi \in \Gamma} H^B(\pi, N^t, S^t) - \inf_{\pi \in \Gamma} H^B(\pi, N^t, S^t)$$

- Wyznaczanie procedur optymalnych – estymatory o Γ -minimaksowej utracie a priori i a posteriori (PRGM)

$$H_{PR}^C(\Gamma) = \frac{1}{2} \left(\sup_{\pi \in \Gamma} H^C(\pi) + \inf_{\pi \in \Gamma} H^C(\pi) \right),$$

$$H_{PR}^B(\Gamma, N^t, S^t) = \frac{1}{2} \left(\sup_{\pi \in \Gamma} H^B(\pi, N^t, S^t) + \inf_{\pi \in \Gamma} H^B(\pi, N^t, S^t) \right)$$

$R_x(\pi, d)$ – ryzyko a posteriori decyzji d przy zaobserwowaniu danych x i rozkładzie a priori π

Estymator o Γ - minimaksowej utracie a posteriori (PRGM) H_{PR}^B spełnia

$$\forall x \quad \sup_{\pi \in \Gamma} r_x(\pi, H_{PR}^B(x)) = \inf_d \sup_{\pi \in \Gamma} r_x(\pi, d)$$

gdzie

$$r_x(\pi, d) = R_x(\pi, d) - R_x(\pi, \hat{H}^B(\pi, x))$$

jest utratą a posteriori

- Kopula (funkcja łącząca) Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)

$$C(u, v) = uv + \omega uv(1 - u)(1 - v), \quad \omega \in [-1, 1]$$

- Niech $k_{1,0}\mu_{1,0}$ i $k_{2,0} > 1$ - liczby całkowite. Rodzina Γ_1

$$\Gamma_1 = \{\pi_\omega : \pi_\omega(\lambda, \theta) = c(\Pi_{1,0}(\lambda), \Pi_{2,0}(\theta)) \pi_{1,0}(\lambda) \pi_{2,0}(\theta) : \omega \in [\omega_1, \omega_2]\}$$

gdzie Π dystrybuanta rozkładu π oraz $-1 \leq \omega_1 < \omega_2 \leq 1$ ustalone

- ω - parametr odpowiadający za zależność, współczynniki korelacji: Kendalla, Spearmana i Pearsona są równe

$$\tau(\omega) = \frac{2\omega}{9}, \quad \rho(\omega) = \frac{\omega}{3}, \quad \text{Corr}(\omega) = \omega \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{l_2} \alpha_{i,j} \mu_{1,i}^* \mu_{2,j}^* \frac{\sqrt{l_1(l_2-2)}}{\mu_{2,0} \mu_{1,0}}$$

- Rozkład π_ω jest kombinacją liniową znanych rozkładów

$$\pi_\omega = \pi_{1,0}(\lambda) \pi_{2,0}(\theta) + \omega \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{l_2} \alpha_{i,j} \pi_{1,i}^*(\lambda) \pi_{2,j}^*(\theta),$$

gdzie $l_1 = k_{1,0} \mu_{1,0}$, $l_2 = k_{2,0} + 1$, $\alpha_{0,0} = -1$, $\pi_{1,0}^* = \pi_{1,0}$, $\pi_{2,0}^* = \pi_{2,0}$,

$\pi_{1,i}^* = \text{Gamma}(i + l_1 - 1, 2k_{1,0})$, $\pi_{2,j}^* = \text{IGamma}(j + l_2 - 1, 2k_{2,0} \mu_{2,0})$,

$$\alpha_{i,0} = \frac{2}{2^{i+l_1-1}} \binom{i+l_1-2}{i-1}, \quad \alpha_{0,j} = \frac{2}{2^{j+l_2-1}} \binom{j+l_2-2}{j-1},$$

$\alpha_{i,j} = -\alpha_{i,0} \alpha_{0,j}$, for $i = 1, \dots, l_1$, $j = 1, \dots, l_2$.

$$H_{\omega}^C = a \left(\mu_{1,0} \mu_{2,0} + \omega \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{l_2} \alpha_{i,j} \mu_{1,i}^* \mu_{2,j}^* \right),$$

$$\mu_{1,0}^* = \mu_{1,0}, \quad \mu_{1,i}^* = \frac{i + k_{1,0} \mu_{1,0} - 1}{2k_{1,0}}, \quad \mu_{2,0}^* = \mu_{2,0}, \quad \mu_{2,j}^* = \frac{2k_{2,0} \mu_{2,0}}{j + k_{2,0} - 1},$$

Oscylacja

$$r(H^C, \Gamma_1) = a(\omega_2 - \omega_1) \left| \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{l_2} \alpha_{i,j} \mu_{1,i}^* \mu_{2,j}^* \right|,$$

Składka optymalna

$$H_{PR}^C(\Gamma_1) = H^C(\pi_{0,0}) = a \left(\mu_{1,0} \mu_{2,0} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{l_2} \alpha_{i,j} \mu_{1,i}^* \mu_{2,j}^* \right),$$

- Rozkład a posteriori:

$$\pi_{\omega}(\lambda, \theta | N^t, S^t) = \frac{-\alpha_{0,0}^*}{A^*} \pi_{1,0}(\lambda | N^t, S^t) \pi_{2,0}(\theta | N^t, S^t) \\ + \omega \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{l_2} \frac{\alpha_{i,j}^*}{A^*} \pi_{1,i}^*(\lambda | N^t, S^t) \pi_{2,j}^*(\theta | N^t, S^t),$$

- Składka bayesowska - funkcja homograficzna zmiennej ω ,
monotoniczna funkcja ω .
- Oscylacja

$$r(H^B(\cdot, N^t, S^t), \Gamma_1) = \left| H^B(\pi_{\omega=\omega_1}, N^t, S^t) - H^B(\pi_{\omega=\omega_2}, N^t, S^t) \right|$$

- Składka PRGM

$$H_{PR}^B(\Gamma_1, N^t, S^t) = \frac{1}{2} \left(H^B(\pi_{\omega=\omega_1}, N^t, S^t) + H^B(\pi_{\omega=\omega_2}, N^t, S^t) \right).$$

Przykład

Model	Rozkład λ	$E\lambda$	$Var(\lambda)$	Rozkład θ	$E\theta$	$Var(\theta)$
M1	$Gamma(1; 2.5)$	0.4	0.16	$IGamma(3; 400)$	200	40000
M2	$Gamma(1; 1)$	1	1	$IGamma(3; 400)$	200	40000

Rodzina rozkładów a priori: Γ_1 z $\omega_1 = -\omega_2 = -1$

Model	H_0^C	$r(H^C, \Gamma_1)$	R_{min}	R_{max}
M1	80	30	0.81	1.19
M2	200	75	0.81	1.19

$$R_{min} = \frac{\inf_{\pi \in \Gamma_1} H^C(\pi)}{H_0^C}, \quad R_{max} = \frac{\sup_{\pi \in \Gamma_1} H^C(\pi)}{H_0^C}$$

Odporność składki bayesowskiej w modelu M1 przy rodzinie Γ_1

	$S/N = 100$			$S/N = 200$			$S/N = 400$		
N	H_0^B	H_{PR}^B	$\frac{r}{H_0^B}$	H_0^B	H_{PR}^B	$\frac{r}{H_0^B}$	H_0^B	H_{PR}^B	$\frac{r}{H_0^B}$
$t = 1$									
0	57.1	57.1	0.240	57.1	57.1	0.240	57.1	57.1	0.240
2	128.6	130.6	0.333	171.4	168.6	0.387	257.1	239.7	0.440
5	220.4	229.0	0.307	342.9	332.9	0.286	587.8	533.6	0.295
$t = 3$									
0	36.4	36.4	0.041	36.4	36.4	0.041	36.4	36.4	0.041
2	81.8	82.3	0.211	109.1	108.3	0.301	163.6	158.0	0.385
5	140.3	144.0	0.249	218.2	213.1	0.270	374.0	344.5	0.296
$t = 5$									
0	26.7	26.7	0.094	26.7	26.7	0.094	26.7	26.7	0.094
2	60.0	60.1	0.115	80.0	79.8	0.221	120.0	118.4	0.327
5	102.9	104.6	0.191	160.0	157.2	0.244	274.3	257.7	0.278

$$\frac{r}{H_0^B} = \frac{\text{oscylacja}(H^B)}{H_0^B}$$

Odporność składki bayesowskiej w modelu M2 przy rodzinie Γ_1

N	$S/N = 100$			$S/N = 200$			$S/N = 400$		
	H_0^B	H_{PR}^B	$\frac{r}{H_0^B}$	H_0^B	H_{PR}^B	$\frac{r}{H_0^B}$	H_0^B	H_{PR}^B	$\frac{r}{H_0^B}$
$t = 1$									
0	100.0	100.0	0.083	100.0	100.0	0.083	100.0	100.0	0.083
2	225.0	226.8	0.239	300.0	297.2	0.322	450.0	431.2	0.399
5	385.7	397.2	0.264	600.0	585.0	0.275	1028.6	943.1	0.298
$t = 3$									
0	50.0	50.0	0.210	50.0	50.0	0.210	50.0	50.0	0.210
2	112.5	112.5	0.024	150.0	150.0	0.137	225.0	225.4	0.264
5	192.9	194.5	0.130	300.0	296.8	0.206	514.3	493.5	0.251
$t = 5$									
0	33.3	33.3	0.352	33.3	33.3	0.352	33.3	33.3	0.352
2	75.0	75.2	0.097	100.0	100.0	0.016	150.0	151.6	0.164
5	128.6	128.7	0.040	200.0	199.4	0.137	342.9	338.0	0.203

Oscylacja mnożników składki w systemie BM

Mnożniki BM:

- Mnożnik w modelu, gdy λ i θ są niezależne

$$BM(\pi_{0,0}, N^t, S^t) = \frac{H^B(\pi_{0,0}, N^t, S^t)}{H_0^C}$$

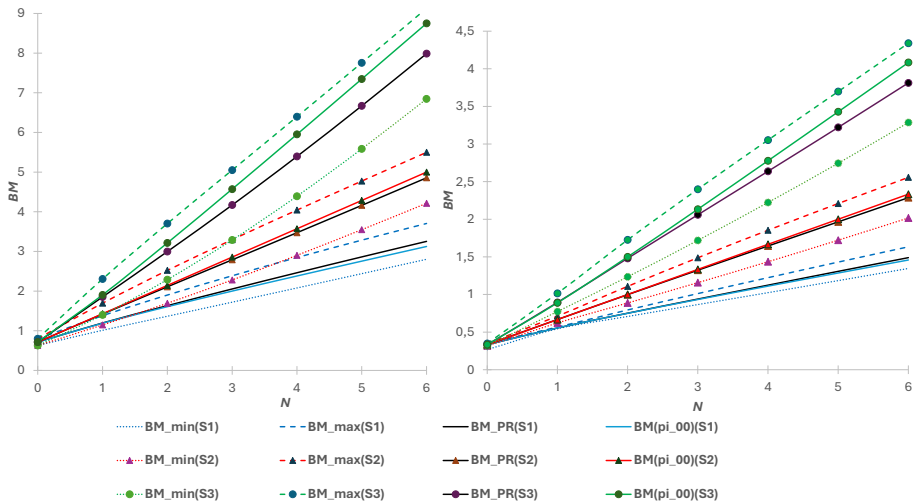
- Wahanie mnożników:

$$BM_{min} = \inf_{\pi \in \Gamma} \frac{H^B(\pi, N^t, S^t)}{H_0^C}, \quad BM_{max} = \sup_{\pi \in \Gamma} \frac{H^B(\pi, N^t, S^t)}{H_0^C}$$

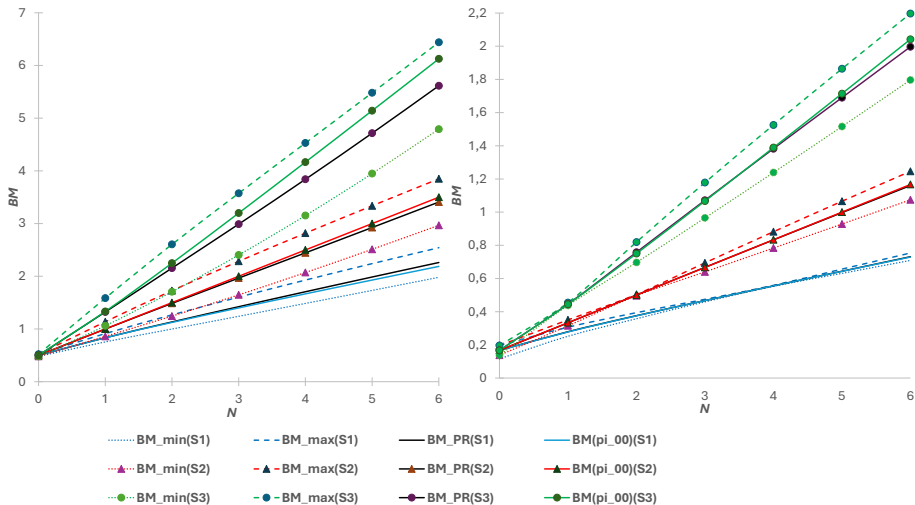
- Mnożnik z wykorzystaniem składek optymalnych

$$BM_{PR}(\Gamma, N^t, S^t) = \frac{H_{PR}^B(\Gamma, N^t, S^t)}{H_{PR}^C(\Gamma)}$$

Mnożniki BM w modelu M1 przy rodzinie Γ_1



Mnożniki BM w modelu M2 przy rodzinie Γ_1



Rodzina Γ_2 rozkładów a priori

- Rozkłady typu ε -zaburzenie

$$\pi^\varepsilon(\lambda) = (1 - \varepsilon)\pi_{1,0}(\lambda) + \varepsilon\pi_{1,1}(\lambda), \quad \pi^\eta(\theta) = (1 - \eta)\pi_{2,0}(\theta) + \eta\pi_{2,1}(\theta)$$

- Rozkład łączny przy niezależnych λ i θ

$$\pi^{\varepsilon,\eta}(\lambda, \theta) = (1 - \varepsilon)(1 - \eta)\pi_{1,0}(\lambda)\pi_{2,0}(\theta)$$

$$+ \varepsilon(1 - \eta)\pi_{1,1}(\lambda)\pi_{2,0}(\theta) + (1 - \varepsilon)\eta\pi_{1,0}(\lambda)\pi_{2,1}(\theta) + \varepsilon\eta\pi_{1,1}(\lambda)\pi_{2,1}(\theta)$$

- Rodzina Γ_2 rozkładów a priori

$$\Gamma_2 = \left\{ \pi_\tau : \pi_\tau(\lambda, \theta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha_{i,j}(\tau) \pi_{1,i}(\lambda) \pi_{2,j}(\theta), \tau \in [0, \min\{\varepsilon, \eta\}] \right\}$$

gdzie

$$\alpha_{0,0}(\tau) = 1 - \varepsilon - \eta + \tau, \quad \alpha_{0,1}(\tau) = \eta - \tau, \quad \alpha_{1,0}(\tau) = \varepsilon - \tau, \quad \alpha_{1,1}(\tau) = \tau$$

- $\tau = \varepsilon\eta$ wtt λ i θ niezależne
- $\text{Cov}_{\pi_\tau}(\lambda, \theta) = (\tau - \varepsilon\eta)(\mu_{1,1} - \mu_{1,0})(\mu_{2,1} - \mu_{2,0})$
- Jeżeli $\tau = \varepsilon\eta$ (niezależność) lub $\mu_{1,1} = \mu_{1,0}$ lub $\mu_{2,1} = \mu_{2,0}$ to $\text{Cov}_{\pi_\tau}(\lambda, \theta) = 0$
- $(\mu_{1,1} - \mu_{1,0})(\mu_{2,1} - \mu_{2,0}) > (<) 0$ to Cov jest rosnącą (malejącą) funkcją τ i jest ujemna (dodatnia) dla $\tau < \varepsilon\eta$.

- Składka kolektywna

$$H^C = a(\tau(\mu_{1,1} - \mu_{1,0})(\mu_{2,1} - \mu_{2,0}) \\ + \varepsilon\mu_{2,0}(\mu_{1,1} - \mu_{1,0}) + \eta\mu_{1,0}(\mu_{2,1} - \mu_{2,0}) + \mu_{1,0}\mu_{2,0})$$

- Oscylacja

$$r(H^C, \Gamma_2) = a \min\{\varepsilon, \eta\} |(\mu_{1,1} - \mu_{1,0})(\mu_{2,1} - \mu_{2,0})|,$$

- Składka optymalna

$$H_{PR}^C(\Gamma_2) = H^C\left(\pi_{\tau = \frac{\min\{\varepsilon, \eta\}}{2}}\right).$$

- Jeżeli $(\mu_{1,1} - \mu_{1,0})(\mu_{2,1} - \mu_{2,0}) = 0$ wtedy $H^C(\pi_\tau) = H^C(\pi^{\varepsilon, \eta})$ nie zależy od τ .

Składka bayesowska

$$H^B(\pi_\tau, N^t, S^t) = a \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{\alpha_{i,j}^*(\tau)}{A(\tau)} \frac{N + \mu_{1,i} k_{1,i}}{t + k_{1,i}} \frac{S + k_{2,j} \mu_{2,j}}{Na + k_{2,j}}$$

Oscylacja

$$r(H^B(\cdot, N^t, S^t), \Gamma_2) = |H^B(\pi_{\tau=\min\{\varepsilon, \eta\}}, N^t, S^t) - H^B(\pi_{\tau=0}, N^t, S^t)|$$

Składka PRGM

$$H_{PR}^B(\Gamma_2, N^t, S^t) = \frac{1}{2} \left(H^B(\pi_{\tau=\min\{\varepsilon, \eta\}}, N^t, S^t) + H^B(\pi_{\tau=0}, N^t, S^t) \right)$$

Przykład

Rozkłady brzegowe:

- **Model M3:**

zmienna λ

$$(1 - \varepsilon) \text{Gamma}(1; 2.5) + \varepsilon \text{Gamma}(1; 1)$$

zmienna θ

$$(1 - \eta) \text{Gamma}(3, 400) + \eta \text{Gamma}(2.2; 240)$$

$$E\lambda = 0.4(1 - \varepsilon) + \varepsilon \quad E\theta = 200$$

- **Model M4:**

zmienna λ jak wyżej

zmienna θ

$$(1 - \eta) \text{Gamma}(3, 400) + \eta \text{Gamma}(3; 600)$$

$$E\lambda = 0.4(1 - \varepsilon) + \varepsilon \quad E\theta = 200(1 - \eta) + 300\eta$$

Zachowanie składki kolektywnej i mnożnika BM

ε	η	$Corr$	H_0^C	R_{min}	R_{max}	$BM_{max} - BM_{min}$		
						100	$\frac{S}{N} =$ 200	400
Γ_2 , the model M3								
0.1	0.1	0	92	1	1	0.229	0.181	0.181
0.1	0.5	0	92	1	1	0.231	0.177	0.200
0.5	0.1	0	140	1	1	0.038	0.014	0.057
0.5	0.5	0	140	1	1	0.197	0.078	0.329
Γ_2 , the model M4								
0.1	0.1	$[-0.005.0.048]$	96.6	0.994	1.056	0.321	0.747	1.277
0.1	0.5	$[-0.022.0.022]$	115	0.974	1.026	0.320	0.612	1.166
0.5	0.1	$[-0.017.0.017]$	147	0.980	1.020	0.069	0.131	0.222
0.5	0.5	$[-0.071.0.071]$	175	0.914	1.086	0.414	0.488	0.650

$$R_{min} = \frac{\inf_{\pi \in \Gamma_1} H^C(\pi)}{H_0^C}, \quad R_{max} = \frac{\sup_{\pi \in \Gamma_1} H^C(\pi)}{H_0^C}$$

$$BM_{min} = \inf_{\pi \in \Gamma} \frac{H^B(\pi, N^t, S^t)}{H_0^C}, \quad BM_{max} = \sup_{\pi \in \Gamma} \frac{H^B(\pi, N^t, S^t)}{H_0^C}$$

- Zbadano zachowanie się składki kolektywnej i bayesowskiej przy pewnych odejściach od założenia niezależności a priori między parametrami opisującymi częstość szkód i wartość oczekiwaną ich wielkości.
- Rozważono dwie rodziny rozkładów a priori, w których rozkłady są kombinacjami liniowymi dwuwymiarowych rozkładów sprzężonych.
- Zaprezentowano sytuację, gdzie zależność pomiędzy zmiennymi opisującymi częstość i wartość oczekiwaną wielkości szkody nie ma wpływu na składkę kolektywną.
- Zależność (nawet przy $Corr$ bliskim 0) może znacząco wpływać na składki bayesowskie i mnożniki składki w systemach bonus-malus.

Dziękuję za uwagę