



UNIwersytet
Jagielloński
w Krakowie

Adam Krawiec, Anna Połec, Tomasz Tokarski

(Katedra Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego)

Zbrojenia a wzrost gospodarczy. Analiza oparta na rozszerzonym modelu Solowa



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Model ten stanowi uogólnienie modelu wzrostu zapropoŃowanego w pracy

War and Economic Growth: An Analysis Based on Extended Solow Model
(Defence and Peace Economics, 2024)

<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10242694.2024.2435280>

autorstwa Katarzyny Filipowicz, Adama Krawca i Tomasza Tokarskiego. Uogólnienie to polega zaś na tym, że technologię (utożsamianą z TFP w funkcji produkcji Cobba-Douglasa) uzależniamy od nakładów kapitału na pracującego zarówno w sektorze cywilnym, jak i militarnym gospodarki.



W modelu przyjmujemy następujące założenia:

- (i) Badamy gospodarkę zamkniętą zdezagregowaną na dwa sektory. Sektor cywilny, który wytwarza produkty konsumpcyjne i inwestycyjne oraz sektor militarny produkujący na potrzeby armii.
- (ii) Proces produkcyjny w każdym z tych sektorów opisuje funkcja produkcji Cobb-Douglassa z taką samą TFP.
- (iii) TFP zmienia się w przedziale $[0,1]$ w zależności od wielkości kapitału na pracującego k_c w sektorze cywilnym oraz k_m w sektorze militarnym. Co więcej, jeśli $k_c \rightarrow 0^+$ lub $k_m \rightarrow 0^+$, to TFP spada do 0, zaś przy $k_c \rightarrow +\infty$ i $k_m \rightarrow +\infty$ TFP zmierza do 1.
- (iv) Ponieważ produkty inwestycyjne wytwarza jedynie sektor cywilny, zatem przyrost kapitału zależny jest od stopy inwestycji s , wielkości produkcji sektora cywilnego Y_c oraz deprecjacji kapitału.
- (v) Czynniki produkcji (kapitał i pracy) dzielone są między sektor cywilny i militarny w pewnych stałych proporcjach $\frac{v_K}{1-v_K}$ oraz $\frac{v_L}{1-v_L}$. Proporcje te zależne są albo od decyzji centralnego planisty (w gospodarce centralnie planowanej), bądź też od wielkości zamówień rządowych na produkty militarne (w gospodarce rynkowej).



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Tak zadany model wzrostu gospodarczego pozwala na symulację skutków wyścigu zbrojeń w sferze realnej gospodarki.

Jego zaś modyfikacja, polegająca na przyjęciu założeń, że w czasie wojny:

- (i) czynniki produkcji stopniowo przesuwane są z sektora cywilnego do militarnego,
- (ii) na skutek zniszczeń wojennych rośnie stopa deprecjacji kapitału

pozwole również na dokonanie symulacji numerycznych podstawowych zmiennych makroekonomicznych w zależności od długości i intensywności konfliktu zbrojnego. Wstępne wyniki tych symulacji (w modelu ze stałą TFP) znaleźć można we wspomnianym opracowaniu Filipowicz, Krawca i Tokarskiego (strona *Defence and Peace Economics*).

Założenia modelu

$$a(k_c(t), k_m(t)) = (1 - e^{-k_c(t)})^{1-m} \cdot (1 - e^{-k_m(t)})^m,$$

$$Y_c(t) = a(t) \cdot K_c^\alpha(t) \cdot L_c^{1-\alpha}(t),$$

$$Y_m(t) = a(t) \cdot K_m^\beta(t) \cdot L_m^{1-\beta}(t),$$

$$\dot{K}(t) = sY_c(t) - \delta K(t),$$

$$L(t) = e^{nt},$$

$$K_c(t) = v_K K(t) \wedge K_m(t) = (1 - v_K)K(t),$$

$$L_c(t) = v_L L(t) \wedge L_m(t) = (1 - v_L)L(t),$$

gdzie:

$$y_j = \frac{Y_j}{L_j} \text{ oraz } k_j = \frac{K_j}{L_j} \text{ (dla } j = c, m).$$



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Własności funkcji $a(k_c, k_m)$

(i) $a: [0, +\infty)^2 \rightarrow [0, 1)$,

(ii) $a(0, k_m) = a(k_c, 0) = 0$,

(iii) $\frac{\partial a}{\partial k_c}, \frac{\partial a}{\partial k_m} > 0$,

(iv) $\lim_{k_c \rightarrow +\infty} a(k_c, k_m) = (1 - e^{-k_m})^m$,

(v) $\lim_{k_m \rightarrow +\infty} a(k_c, k_m) = (1 - e^{-k_c})^{1-m}$,

(vi) $k_c \rightarrow +\infty \wedge k_m \rightarrow +\infty \Rightarrow a \rightarrow 1$.



Funkcje wydajności pracy



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Sektor cywilny:

$$y_c = f_c(k_c, k_m) = (1 - e^{-k_c})^{1-m} \cdot (1 - e^{-k_m})^m \cdot k_c^\alpha$$

Sektor militarny:

$$y_m = f_m(k_c, k_m) = (1 - e^{-k_c})^{1-m} \cdot (1 - e^{-k_m})^m \cdot k_m^\beta$$



Własności funkcji wydajności pracy w sektorze cywilnym (w sektorze militarnym – analogicznie)

(i) $f_c: [0, +\infty)^2 \rightarrow [0, +\infty)$,

(ii) $f_c(k_c, 0) = f_c(0, k_m) = 0$,

(iii) $\frac{\partial f_c}{\partial k_c}, \frac{\partial f_c}{\partial k_m} > 0$,

(iv) $\forall k_m > 0 \lim_{k_c \rightarrow +\infty} f_c(k_c, k_m) = +\infty$,

(v) $\forall k_c > 0 \lim_{k_m \rightarrow +\infty} f_c(k_c, k_m) = (1 - e^{-k_c})^{1-m} \cdot k_c^\alpha > 0$.

Elastyczności i quasi-elastyczności w sektorze cywilnym (w sektorze militarnym – analogicznie)

$$\varepsilon_c(k_c) = \frac{\partial f_c}{\partial k_c} \cdot \frac{k_c}{f_c(k_c)} = \alpha + (1 - m) \frac{k_c}{e^{k_c} - 1}$$

Ponieważ:

$$(i) \lim_{k_c \rightarrow 0^+} \varepsilon_c(k_c) = 1 - m + \alpha,$$

$$(ii) \varepsilon'_c(k_c) < 0,$$

$$(iii) \lim_{k_c \rightarrow +\infty} \varepsilon_c(k_c) = \alpha,$$

zatem jeśli k_c rośnie od 0 do $+\infty$, to elastyczność $\varepsilon_c(k_c)$ spada od $1 - m + \alpha$ do α .



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Funkcje wydajności pracy zależne od k

Sektor cywilny:

$$y_c = f_c(k) = \left(\frac{v_K}{v_L}\right)^\alpha \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{v_K}{v_L}k\right)\right)^{1-m} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1-v_K}{1-v_L}k\right)\right)^m \cdot k^\alpha$$

Sektor militarny:

$$\begin{aligned} y_m = f_m(k) &= \\ &= \left(\frac{1-v_K}{1-v_L}\right)^\beta \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{v_K}{v_L}k\right)\right)^{1-m} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1-v_K}{1-v_L}k\right)\right)^m \cdot k^\beta \end{aligned}$$



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Funkcja wydajności pracy w sektorze cywilnym – własności (w sektorze militarnym – analogicznie)

(i) $f_c(0) = 0$,

(ii) $f'_c(k) > 0$,

(iii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_c(k) = +\infty$.

Ponadto znaki pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f_c}{\partial v_K}$ oraz $\frac{\partial f_c}{\partial v_L}$ są niejednoznaczne.



UNIwersYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Uogólnione równanie Solowa



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

$$\dot{k}(t) = P \cdot (1 - e^{-Ak(t)})^{1-m} \cdot (1 - e^{-Bk(t)})^m \cdot k^\alpha(t) - Q \cdot k(t),$$

gdzie: $P = s \left(\frac{v_K}{v_L} \right)^\alpha > 0$, $Q = \delta + n > 0$, $A = \frac{v_K}{v_L} > 0$ oraz $B = \frac{1-v_K}{1-v_L} > 0$.

Powyższy związek interpretuje się analogicznie do równania Solowa. Jednak (w przeciwieństwie do oryginalnego równania Solowa) równanie to nie ma nietrywialnej całki ani w zbiorze funkcji elementarnych, ani wśród funkcji specjalnych Gaussa i Eulera. Natomiast całkę trywialną $k(t) = 0$ (jako nieciekawą zarówno z matematycznego, jak i ekonomicznego punktu widzenia) pomijamy.

Uogólnione równanie Solowa

Uogólnione równanie Solowa można również zapisać wzorem:

$$\dot{k}(t) = (P\varphi(k(t)) - Q)k(t),$$

gdzie:

$$\varphi(k) = (1 - e^{-Ak})^{1-m} \cdot (1 - e^{-Bk})^m \cdot k^{\alpha-1}.$$

Z powyższego związku płyną następujące wnioski:

- (i) Jeśli istnieje $k > 0$ takie, że funkcja $\varphi(k)$ przyjmuje wartość równą ilorazowi $\frac{Q}{P}$, to badane równanie różniczkowe ma nietrywialny punkt stacjonarny (lub nietrywialne punkty stacjonarne).
- (ii) W przypadku, w którym $\varphi(k) > \frac{Q}{P}$ przyrosty kapitału na pracującego w tym równaniu różniczkowym są dodatnie, natomiast przy $\varphi(k) < \frac{Q}{P}$ – ujemne.



Własności funkcji $\varphi(k)$

Można pokazać, że funkcja $\varphi(k)$ charakteryzuje się między innymi następującymi własnościami:

- (i) $(k \rightarrow 0^+ \vee k \rightarrow +\infty) \Rightarrow \varphi(k) \rightarrow 0$,
- (ii) istnieje dokładnie jedna wartość $\bar{k} > 0$ taka, że:
 - (a) jeśli $k \in (0, \bar{k})$, to $\varphi'(k) > 0$,
 - (b) $\varphi'(\bar{k}) = 0$,
 - (c) dla każdego $k > \bar{k}$ mamy: $\varphi'(k) < 0$.

Płynie stąd wniosek, iż jeśli kapitał na pracującego k rośnie od 0 do $+\infty$, to w przedziale $(0, \bar{k})$ wartości funkcji $\varphi(k)$ rosną od 0 do $\varphi_M = \varphi(\bar{k})$, natomiast w przedziale $(\bar{k}, +\infty)$ wartości owej funkcji spadają od φ_M do 0.

Uogólnione równanie Solowa

Z powyższych własności funkcji $\varphi(k)$ wynika, że:

1) W przypadku, w którym $\varphi_M < \frac{P}{Q}$ uogólnione równanie Solowa nie ma nietrywialnych punktów stacjonarnym. Wówczas przy dowolnym $k(0) > 0$ przyrosty owego kapitału $\dot{k}(t)$ są ujemne, a więc: $k(t) \rightarrow 0$. Jeśli zaś $k(t) \rightarrow 0$, to również: $a(t) \rightarrow 0$, co prowadzi do tego, że także wydajności pracy zarówno w sektorze cywilnym y_c , jak i w sektorze militarnym y_m są w długim okresie zbieżne do 0.

2) Jeśli zaś $\varphi_M = \frac{P}{Q}$, to:

(a) dla dowolnego $k(0) > \bar{k}$ zachodzi: $\dot{k}(t) < 0$, co powoduje, że wówczas: $k(t) \rightarrow \bar{k}$,

(b) $k(0) = \bar{k} \Rightarrow \forall t \geq 0 \dot{k}(t) = 0 \wedge k(t) = \bar{k}$,

(c) przy $k(0) < \bar{k}$ mamy: $\dot{k}(t) < 0 \wedge k(t) \rightarrow 0$.



Uogólnione równanie Solowa

3) W przypadku, w którym $\varphi_M < \frac{P}{Q}$ uogólnione równanie Solowa ma dwa nietrywialne punkty stacjonarne: $\bar{k}_1 \in (0, \bar{k})$ oraz $\bar{k}_2 \in (\bar{k}, +\infty)$, co wynika stąd, że w tych punktach wartości funkcji $\varphi(k)$ zrównują się z wielkością $\frac{P}{Q}$. Dlatego też:

(i) Jeśli $k(0) \in (0, \bar{k}_1)$, to $\dot{k}(t) < 0$, więc wówczas: $k(t), a(t), y_c(t), y_m(t) \rightarrow 0$.

(ii) Gdyby zaś wyjściowy kapitał na pracującego $k(0)$ wynosił $\bar{k}_1$, to w każdym następnym momencie $\dot{k}(t) = 0$, czyli: $\forall t \geq 0 \ k(t) = \bar{k}_1$. Ponadto:

$$k(t) = \bar{k}_1 \implies a(t) = a(\bar{k}_1) \wedge y_c(t) = f_c(\bar{k}_1) \wedge y_m(t) = f_m(\bar{k}_1).$$

(iii) W przypadku, w którym $k(0) \in (\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ przyrosty kapitału na pracującego $\dot{k}(t)$ są dodatnie, czyli wówczas:

$$k(t) \rightarrow \bar{k}_2 \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}_2) \wedge y_c(t) \rightarrow f_c(\bar{k}_2) \wedge y_m(t) \rightarrow f_m(\bar{k}_2).$$

(iv) Przy $k(0) = \bar{k}_2$ w każdym momencie $t \geq 0$ mamy $\dot{k}(t) = 0$, co powoduje, że:

$$k(t) = \bar{k}_2 \implies a(t) = a(\bar{k}_2) \wedge y_c(t) = f_c(\bar{k}_2) \wedge y_m(t) = f_m(\bar{k}_2).$$

(v) $k(0) > \bar{k}_2 \implies \dot{k}(t) < 0$, więc w tym przypadku zachodzą związki:

$$k(t) \rightarrow \bar{k}_2 \wedge a(t) \rightarrow a(\bar{k}_2) \wedge y_c(t) \rightarrow f_c(\bar{k}_2) \wedge y_m(t) \rightarrow f_m(\bar{k}_2).$$

Własności punktów $\bar{k}$, $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$

Można pokazać, że:

$$\bar{k} = \bar{k}(\alpha, m, v_K, v_L),$$

przy czym: $\frac{\partial \bar{k}}{\partial \alpha} > 0$, natomiast znaki pochodnych $\frac{\partial \bar{k}}{\partial m}$, $\frac{\partial \bar{k}}{\partial v_K}$ oraz $\frac{\partial \bar{k}}{\partial v_L}$ są niejednoznaczne.

Ponadto:

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_1(\alpha, m, v_K, v_L, s, \delta, n) \wedge \bar{k}_2 = \bar{k}_2(\alpha, m, v_K, v_L, s, \delta, n).$$

W tym przypadku jednoznaczne są tylko znaki pochodnych cząstkowych funkcji $\bar{k}_1$ oraz $\bar{k}_2$ po stopach s , δ i n . Wówczas:

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial s} < 0 \wedge \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial s} > 0$$

oraz:

$$\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial \delta} = \frac{\partial \bar{k}_1}{\partial n} > 0 \wedge \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial \delta} = \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial n} < 0.$$



Symulacje numeryczne

Bierzemy układ dynamiczny w czasie dyskretnym $t = 0, 1, \dots$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = \left(1 - \exp\left(-\frac{v_K K}{v_L e^{nt}}\right) \right)^{1-m} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{(1-v_K)K}{(1-v_L)e^{nt}}\right) \right)^m \\ Y_{ct} = a_t v_K^\alpha v_L^{1-\alpha} K_t^\alpha e^{(1-\alpha)nt} \\ Y_{mt} = a_t (1-v_K)^\beta (1-v_L)^{1-\beta} K_t^\beta e^{(1-\beta)nt} \\ \Delta K_t = sY_{ct-1} - \delta K_{t-1} \\ K_0 > 0 \wedge L_0 > 0 \end{array} \right.,$$

a stąd:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = \left(1 - \exp\left(-\frac{v_K K}{v_L e^{nt}}\right) \right)^{1-m} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{(1-v_K)K}{(1-v_L)e^{nt}}\right) \right)^m \\ Y_{ct} = a_t v_K^\alpha v_L^{1-\alpha} K_t^\alpha e^{(1-\alpha)nt} \\ Y_{mt} = a_t (1-v_K)^\beta (1-v_L)^{1-\beta} K_t^\beta e^{(1-\beta)nt} \\ K_t = sY_{ct-1} + (1-\delta)K_{t-1} \\ K_0 > 0 \wedge L_0 > 0 \end{array} \right. .$$

Symulacje numeryczne – kalibracja parametrów modelu



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

O quasi-elastyczności α funkcji produkcji w sektorze cywilnym założono, że wynosi $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$. Wówczas gdyby proces produkcyjny w tym sektorze opisywała funkcja produkcji, w której technologia a jest niezależna od zasobu kapitału na pracującego, to biorąc dwie gospodarki o relacji kapitału na pracującego $\frac{k_{Act}}{k_{Bct}}$ wynoszącej 3 otrzymamy stosunek wydajności pracy $\frac{y_{Act}}{y_{Bct}} = \left(\frac{k_{Act}}{k_{Bct}}\right)^{\ln 2 / \ln 3}$ równy 2. Z podobnych względów bierzemy $\beta = \frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,6826$.

Zakładamy również, że kapitał na pracującego w sektorze cywilnym k_c dwukrotnie silniej oddziałuje na technologię a od wartości owej zmiennej w sektorze militarnym k_m , a zatem bierzemy $m = \frac{1}{3}$. Arbitralnie przyjmujemy też, że stopa deprecjacji kapitału δ wynosi 7,5%.

Symulacje numeryczne – kalibracja parametrów modelu

Przy przyjętych założeniach dotyczących wartości zmiennych niezależnych w badanym modelu wzrostu gospodarczego model ten może imitować trajektorie wielkości produkcji w gospodarce amerykańskiej i radzieckiej w okresie zimnej wojny.

Bierzemy wówczas wielkości jak w tabeli poniżej.

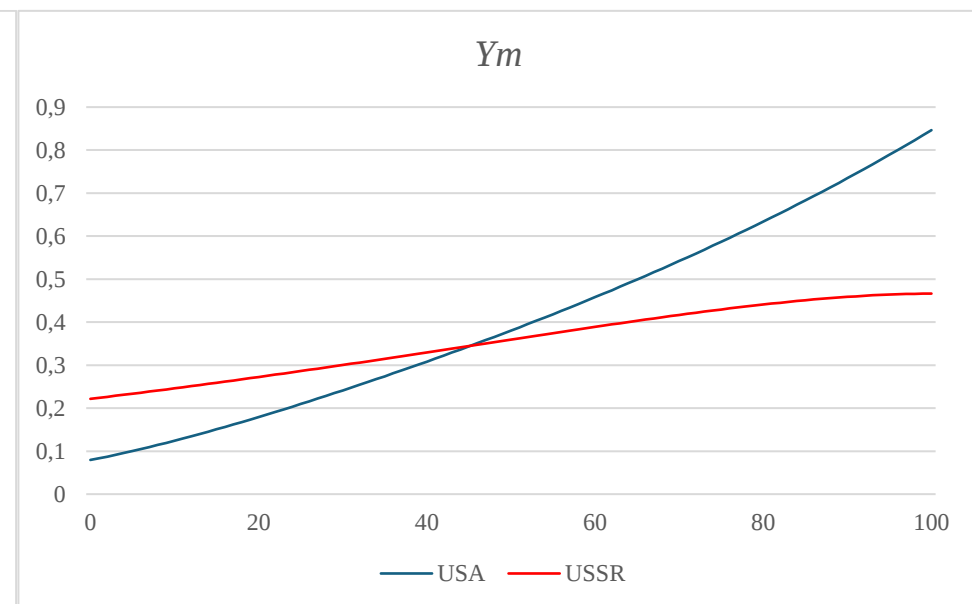
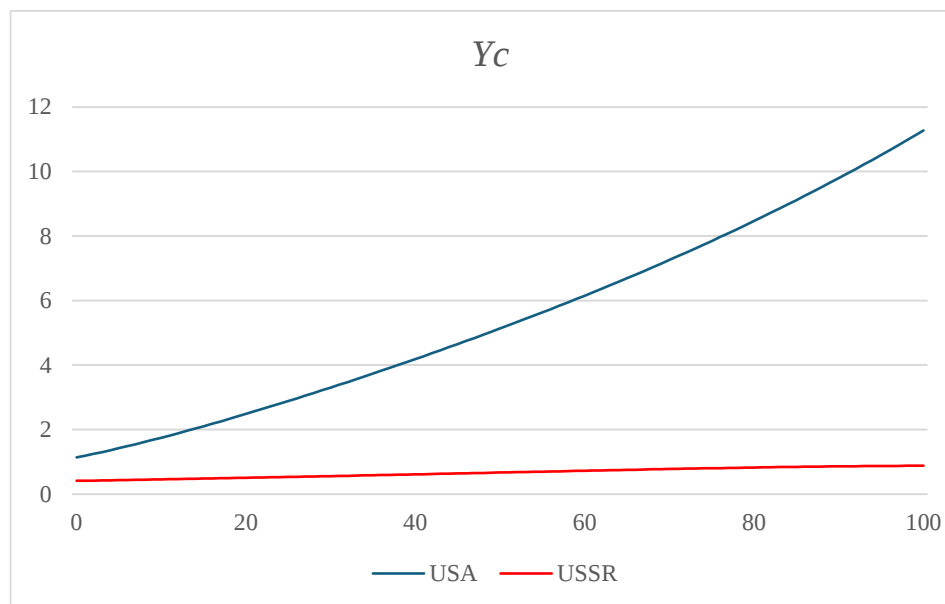
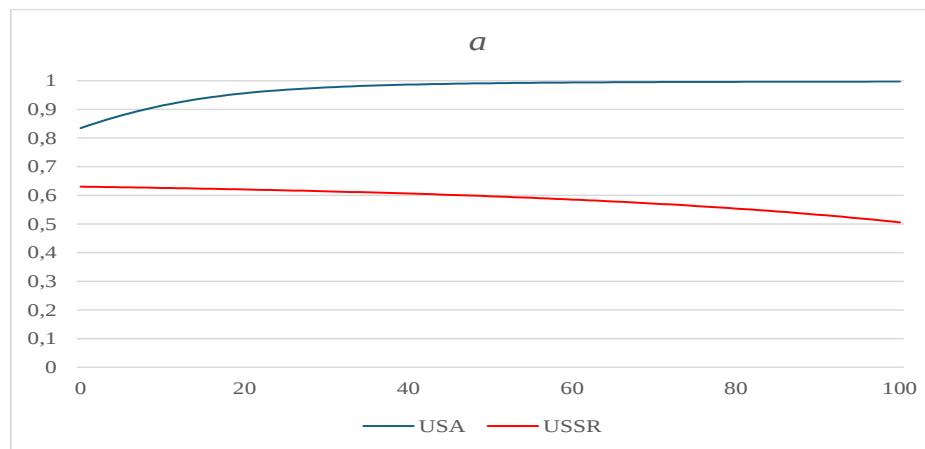
Zmienna niezależna	USA	ZSRR
v_K	0,95	$\frac{\ln 2}{\ln 3}$
v_L	0,9	$\frac{\ln 3}{\ln 5}$
s	0,22	0,21
n	0,0125	0,01
K_0	2	1
L_0	0,85	1



Symulacje numeryczne (zimna wojna USA-ZSRR)



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE



Symulacje numeryczne – Korea Płd. vs Korea Płn.

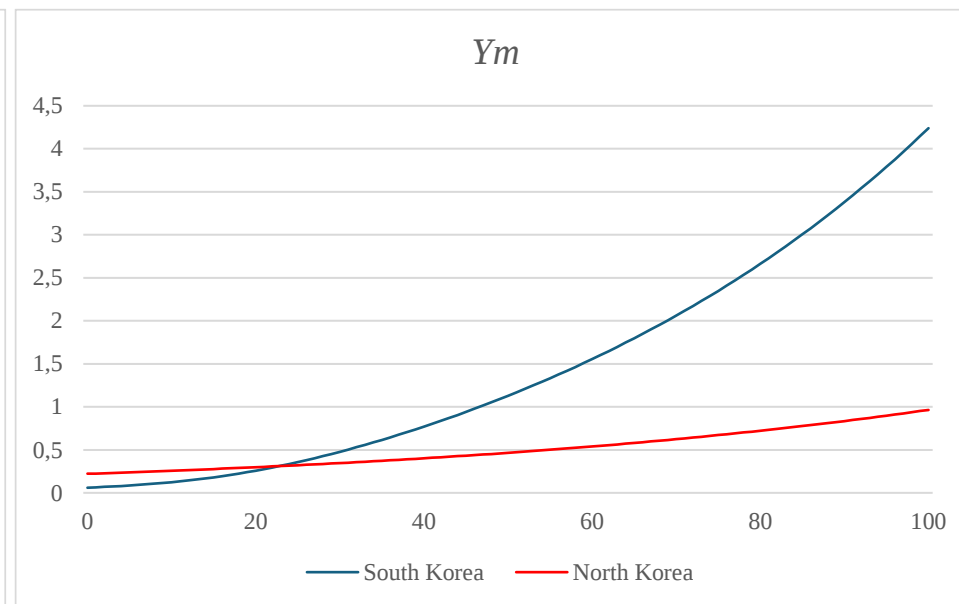
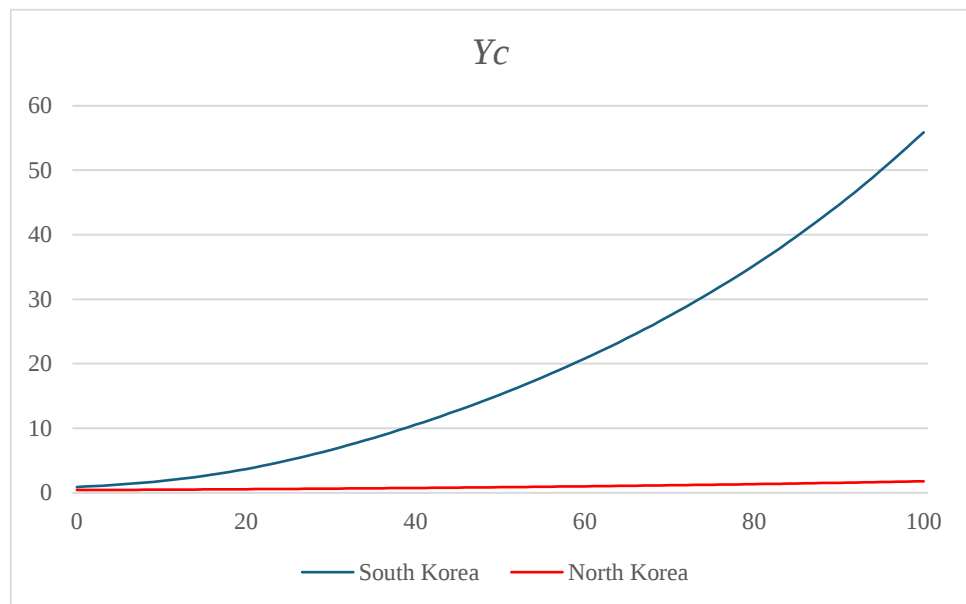
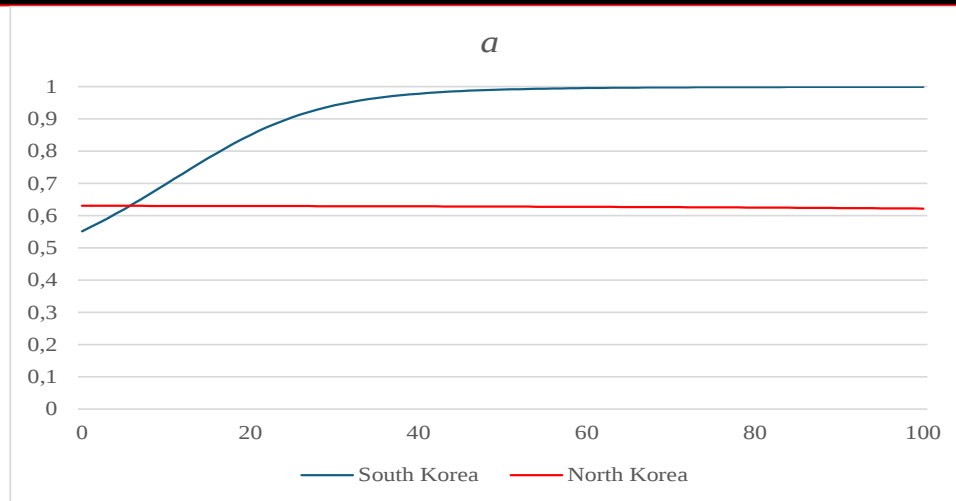
Bierzemy również następujące kombinacje:

Zmienna niezależna	Korea Płd.	Korea Płn.
v_K	0,95	$\frac{\ln 2}{\ln 3}$
v_L	0,9	$\frac{\ln 3}{\ln 5}$
s	0,26	0,22
n	0,02	0,015
K_0	1,75	1
L_0	1,75	1

Symulacje numeryczne – Korea Płd. vs Korea Płn.



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE





UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Dziękujemy za uwagę